Exercice 1:

1. On reconnaît une série géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
   La série $\sum \frac{1}{4^n}$ est donc convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}$.

2. On reconnaît une série géométrique de raison $\frac{1}{\mathbf{e}}$.
   La série $\sum \frac{1}{\mathbf{e}^n}$ est donc convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathbf{e}^n} = \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{e}-1}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{3^{n-1}}{5^{n+1}} = \frac{1}{15}.\left(\frac{3}{5}\right)^n$. La série $\sum \left(\frac{3}{5}\right)^n$ est convergente de limite $\frac{5}{2}$.
   Puisque l'ensemble des séries convergentes est stable par combinaison linéaire, la série $\sum \frac{1}{15}.\left(\frac{3}{5}\right)^n$ est convergente de limite $\frac{1}{15}.\frac{5}{2} = \frac{1}{6}$.

4. On reconnait une série géométrique de raison $\mathbf{e}^2$. Donc la série $\sum \mathbf{e}^{2n}$ diverge.

5. On reconnaît la série de terme général $\frac{z^n}{n!}$. Donc $\sum \frac{2^n}{n!}$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = \mathbf{e}^2$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k3^k}{k!} + \frac{3^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} = \sum_{j=0}^{n-1} 3\frac{3^j}{j!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!}$.
   Donc $\sum \frac{(n+1)3^n}{n!}$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)3^n}{n!} = 3\mathbf{e}^3 + e^3 = 4e^3$

Exercice 2: On s'intéresse aux suites (u_n) et (w_n) telles que $u_0 = 0$, $w_0 = 1$, $w_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$, et $w_{n+2} = 4w_{n+1} - 4w_n$.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
   - On cherche le point fixe $x = 2x + 1 \to x = -1$.
   - On étudie la suite $v_n = u_n + 1$ et on montrer qu'elle est géométrique de raison 2 :
     $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n.v_0 = 2^n$.
   - On revient à la suite u : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n - 1 = 2^n - 1$.

   La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   - On cherche les racines de l'équation caractéristique: $x^2 = 4x - 4 \to x = 2$.
   - On a donc la forme générale de la suite w $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = (A + Bn)2^n$.
   - On détermine A et B avec les premiers termes : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = (1-n)2^n$.

2. On calcule alors les sommes partielles.

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=0}^{n} (2^k - 1) = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} - (n+1) = 2^{n+1} - 1 - (n+1) \\ W_n &= \sum_{k=0}^{n} (1-k)2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} - \sum_{k=0}^{n} k2^k \end{aligned}$$

Pour la deuxième somme, on dérive la formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ et on obtient le résultat suivant : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$. Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n+1)2^n + (1-2^{n+1}) = (n-1)2^n + 1$.
D'où :

$$U_n = 2^{n+1} - n - 2$$
$$W_n = 2^{n+1} - 1 - 2((n-1)2^n + 1) = (2-n)2^{n+1} - 3$$

3. $U_n \sim 2^{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$. La série $\sum u_n$ diverge.
$\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = -\infty$. La série $\sum w_n$ diverge.

Exercice 3:

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^1 t^{k-1}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^k}{k}\right]_0^1 = \frac{1}{k}$$

2. On remplace dans la somme et on intervertit la somme et l'intégrale.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t = [\ln(1+t)]_0^1 - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t \\ &= \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

3. On va déterminer la limite de l'intégrale.

$$\left|(-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

Par encadrement et opération sur les limites, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$

Donc, la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

Par stabilité par combinaison linéaire, la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.

Exercice 4:

1. Les séries $\displaystyle\sum \frac{1}{n!}$, $\displaystyle\sum \frac{j^n}{n!}$ et $\displaystyle\sum \frac{j^{2n}}{n!}$ sont des séries de terme général de la forme $\frac{z^n}{n!}$ où $z \in \mathbb{C}$. D'après le cours, elles convergent et leurs sommes respectives valent $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}^j$ et $\mathbf{e}^{j^2}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $a_n = \frac{1}{3}\left(1 + j^n + j^{2n}\right)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
1er cas : Si $n = 3m$ où $m \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{3}(1+1+1) = 1$.
2ème cas : Si $n = 3m+1$ où $m \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{3}\left(1+j+j^2\right) = 0$.
3ème cas : Si $n = 3m+2$ où $m \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{3}\left(1+j^2+j^4\right) = \frac{1}{3}\left(1+j^2+j\right) = 0$.

3. D'après la question précédente, $\sum \frac{a_n}{n!} = \sum \frac{1}{(3n)!}$. Or, par somme, $\sum \frac{a_n}{n!}$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{2n}}{n!}\right) = \frac{1}{3}\left(\mathbf{e} + \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}} + \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}}\right) = \frac{1}{3}\mathbf{e} + \frac{2}{3}\mathbf{e}^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

D'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{1}{3}\mathbf{e} + \frac{2}{3}\mathbf{e}^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercice 5: Déterminer un équivalent en $+\infty$ des suites suivantes puis la nature des séries associées :

1. $u_n \sim \frac{1}{n}$. Par comparaison de série à termes positifs à une série de Riemann, $\sum u_n$ diverge.
2. $u_n = \frac{2}{n^2-1} \sim \frac{2}{n^2}$. Par comparaison de séries à termes positifs à une série de Riemann, $\sum u_n$ converge.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathbf{e}$ donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
4. $\mathrm{ch}(n) \sim \frac{\mathbf{e}^n}{2}$ donc $u_n \sim \mathbf{e}^{-n}$. Par comparaison de séries à termes positifs à une série géométrique, $\sum u_n$ converge.

Exercice 6:

1. Ceux sont des séries à termes positifs.

$$\begin{aligned}
n^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} &= n^2.\exp\left(n^2\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) = n^2.\exp\left(-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\
-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &\sim -n \\
\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} &= \lim_{n\to+\infty} n^2\mathbf{e}^{-n} = 0
\end{aligned}$$

Donc, $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ converge.

2. Ceux sont des séries à termes positifs.

$$\begin{aligned}
n.\left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} &= \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
\text{Par croissance comparée, } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) &= 0 \\
\text{Donc, } \lim_{n\to+\infty} n.\left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} &= 1
\end{aligned}$$

On a bien $\left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} \sim \frac{1}{n}$.

Ce dernier est le terme d'une série divergente. Par comparaison des séries de termes positifs, $\sum \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$ diverge.

3.
$$n^2.\frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}} = \exp\left(2\ln(n) - \ln(n).\ln(\ln(n))\right) = \exp\left(\ln(n)(2-\ln(\ln(n)))\right)$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n)(2-\ln(\ln(n))) = -\infty$ donc on a bien $\dfrac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \dfrac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$ converge.

Exercice 7:

1. $\dfrac{n+1}{n^2+1} \sim \dfrac{1}{n}$. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \dfrac{n+1}{n^2+1}$ diverge.
2. $\dfrac{\ln(n)}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \dfrac{\ln(n)}{n}$ diverge.
3. $\sin\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right) \sim \dfrac{1}{n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Ce dernier terme ($\geqslant 0$) est le terme d'une série convergente, d'où $\sum \sin\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ converge.
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$ donc $\dfrac{1}{n^2.3^n} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \dfrac{1}{n^2.3^n}$ converge.
5. $\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 \sim \dfrac{1}{2n^2}$ donc $\sqrt{\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2}n}$. Par comparaison de séries à termes positifs,
$\sum \sqrt{\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1}$ diverge.
6. Montrons que $\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+1)!} \sim \dfrac{1}{n}$.
On a $n\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+1)!} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n!} + ... + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n} + 1\right)$ et $0 \leqslant \frac{1}{n!} + ... + \frac{1}{n(n-1)} \leqslant \frac{1}{n}$ d'où
$$1 \leqslant n\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+1)!} \leqslant \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{2}{n}\right)$$

Par théorème d'encadrement, $\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+1)!} \sim \dfrac{1}{n}$.
Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+1)!}$ est une série divergente.

Exercice 8: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$.

1. On a $\frac{v_n}{u_n} = 1 + \frac{1}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sqrt{n}} \to 1$. Donc $u_n \sim v_n$.
2. D'après le CSSA, la série $\sum u_n$ est convergente et d'après le théorème de la nature des séries de Riemann, $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.
3. Par l'absurde si $\sum v_n$ converge, alors par combinaison linéaire $\sum(v_n - u_n) = \sum \dfrac{1}{n}$ converge ce qui est absurde.
D'où $\sum v_n$ diverge.

Exercice 9: On considère la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, dont on note H_n la somme partielle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [\![2;n]\!]$,
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$
D'où
$$1+\int_2^{n+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant H_n \leqslant 1+\int_1^{n} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$
i.e.
$$1+\ln(n+1)-\ln(2) \leqslant H_n \leqslant 1+\ln(n)$$
D'où $H_n \sim \ln(n)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1}-u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
D'où $u_{n+1}-u_n \sim -\frac{1}{2n^2}$. C'est le terme de signe constant d'une série convergente.
Donc $\sum(u_{n+1}-u_n)$ est convergente, on en déduit que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 10: C'est une série de Bertrand (i.e. de terme général de la forme $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$).

1. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est un quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas sur $]1,+\infty[$ donc f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et
$$\forall x \in]1,+\infty[,\ f'(x) = \frac{-(\ln(x)+1)}{x^2\ln^2(x)} \leqslant 0$$
Donc la fonction f est continue et décroissante sur $]1,+\infty[$.

2. Soit $k \geqslant 2$.
$$\frac{1}{k\ln(k)} \quad \geqslant \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t$$

3.
$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \quad &\geqslant \quad \int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t = [\ln(\ln(t))]_2^{n+1} \\ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \quad &\geqslant \quad \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))\end{aligned}$$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) = +\infty$. Par minoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\ln(k)} = +\infty$
donc la série $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

Exercice 11:

1. Pour $a > 1$, la série $\sum \dfrac{1}{n^a}$ est une série de Riemann convergente donc ζ est une fonction bien définie sur $]1;+\infty[$.

2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^a}$ est positive, continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $k \in [\![2,+\infty[\![$. $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^a}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^a} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^a}\mathrm{d}t$. D'où

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t^a}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^a} \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{t^a}\mathrm{d}t$$

De plus, $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{t^a}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1^a} \leqslant 1$. On obtient alors un encadrement des sommes partielles,

$$\frac{(n+1)^{1-a}-1}{1-a} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a} \leqslant \frac{n^{1-a}-1}{1-a} + 1$$

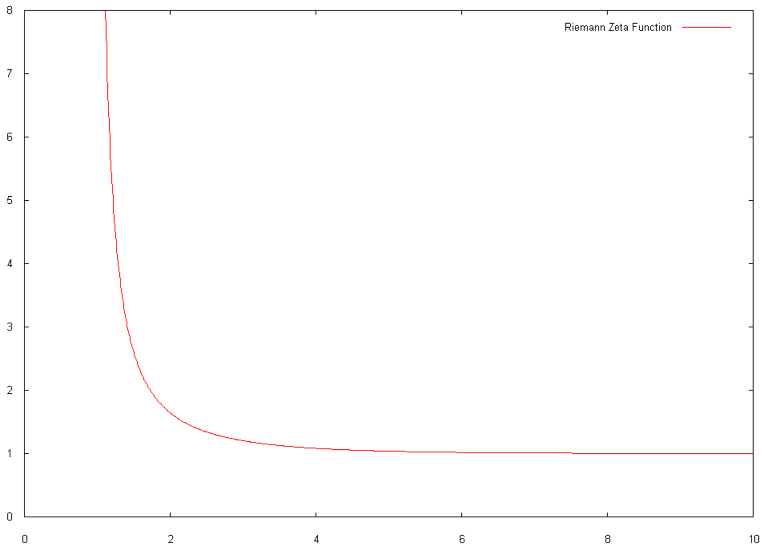
On peut passer à la limite car on sait que toutes les quantités convergent.

$$\frac{-1}{1-a} \leqslant \zeta(a) \leqslant \frac{-1}{1-a} + 1$$
$$\frac{1}{a-1} \leqslant \zeta(a) \leqslant \frac{1}{a-1} + 1$$

3. Par encadrement, $\zeta(a) \underset{a\to 1^+}{\sim} \frac{1}{a-1}$.

4. Par conséquent, pour tout $a \in]1,+\infty[$, $1 \leqslant \zeta(a) \leqslant \frac{1}{a-1}+1$. D'après le théorème d'encadrement, $\zeta(a) \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

5.



<u>Exercice</u> <u>12</u>: On sait, d'après le théorème des séries de Riemann que $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ converge.
Soient $n, m \in [\![2;+\infty[\![$ tels que $n+1 \leqslant m$, à l'aide d'une comparaison série intégrale, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{m} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$$

i.e.

$$\int_{n+1}^{m+1} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_n^{m} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$$

i.e.
$$-\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+1}\leqslant\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k^2}\leqslant-\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\,.$$
En passant à la limite quand m tend vers $+\infty$, on obtient
$$\frac{1}{n+1}\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\leqslant\frac{1}{n}$$

Conclusion : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\sim\frac{1}{n}$.

Exercice 13:

1. On va faire apparaître une somme télescopique. Soit $n\in\mathbb{N}$.
$$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{n+1-1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$
De plus, la suite $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc la série $\sum\frac{n}{(n+1)!}$ converge.
$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)=1-\frac{1}{(n+1)!}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$$
Donc, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1$.

2. On va faire apparaitre une somme télescopique. Soit $n\in[\![2;+\infty[\![$.
$$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)=\ln\left(\frac{n-1}{n}.\frac{n+1}{n}\right)=\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$
La suite $\left(\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc la série $\sum\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ converge.
$$\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\sum_{k=2}^{n}\left(\ln\left(\frac{k-1}{k}\right)-\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\ln(2)$$
donc $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=-\ln(2)$.

3. $\displaystyle\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\sim\frac{1}{n^3}$. Par comparaison des séries à termes positifs à une série de Riemann, la série $\sum\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge.
Pour calculer sa somme, on utilise une décomposition en éléments simples. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
$$\begin{aligned}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}&=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}\\\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{4}\end{aligned}$$
d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}$.

4. $\dfrac{1}{n^2(n+1)^2} \sim \dfrac{1}{n^4}$. Par comparaison des séries à termes positifs à une série de Riemann, la série $\sum \dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge. Pour calculer sa somme, on utilise une décomposition en éléments simples. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2(n+1)^2} &= \frac{-2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}\\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2(k+1)^2} &= \sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)+2.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-1+\frac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\frac{\pi^2}{6}-3\end{aligned}$$
d'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{3}-3$.

<u>Exercice</u> <u>14:</u>

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{1}{k(k+1)}\right) &= \sin\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sin\left(\frac{1}{k}\right)\cos\left(\frac{1}{k+1}\right)-\cos\left(\frac{1}{k}\right)\sin\left(\frac{1}{k+1}\right)\\ \frac{\sin\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)}{\cos(\frac{1}{k})\cos(\frac{1}{k+1})} &= \frac{\sin(\frac{1}{k})\cos(\frac{1}{k+1})-\cos(\frac{1}{k})\sin(\frac{1}{k+1})}{\cos(\frac{1}{k})\cos(\frac{1}{k+1})}=\tan\left(\frac{1}{k}\right)-\tan\left(\frac{1}{k+1}\right)\end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)}{\cos(\frac{1}{k})\cos(\frac{1}{k+1})}=\sum_{k=1}^{n}\tan\left(\frac{1}{k}\right)-\tan\left(\frac{1}{k+1}\right)=\tan(1)-\tan\left(\frac{1}{n+1}\right)$$
La suite $(\tan(1)-\tan(\frac{1}{n+1}))_{n\geqslant 1}$ admet une limite finie en $+\infty$ donc la série $\sum \dfrac{\sin\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)}{\cos(\frac{1}{k})\cos(\frac{1}{k+1})}$ est convergente, de somme $\tan(1)$.

<u>Exercice</u> <u>15:</u>

1. On peut montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. Par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$v_n = n.u_n = \mathbf{e}^{-u_{n-1}}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$.

3. On a $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

<u>Exercice</u> <u>16:</u> On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Notons $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$. On a donc $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
L'intervalle $[1;+\infty[$ est stable par f et contient u_0. Donc (u_n) est bien définie et $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
De plus, f est croissante sur $[1;+\infty[$, donc (u_n) est monotone. Par ailleurs, $u_0 \leqslant u_1$, donc (u_n) est croissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$u_{n+1}^2-u_n^2=(u_{n+1}-u_n)(u_{n+1}+u_n)=\frac{1}{u_n}\left(2u_n+\frac{1}{u_n}\right)=2+\frac{1}{u_n^2}\geqslant 2$$
On a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(u_{k+1}^2-u_k^2\right)\geqslant\sum_{k=0}^{n-1}2$ i.e. $u_n^2 \geqslant 2n$ i.e. $u_n \geqslant \sqrt{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$.

3. On a $\frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$. Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k^2} \underset{n\to+\infty}{=} O(\ln(n))$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, On a $u_n^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(u_{k+1}^2 - u_k^2\right) = 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$ d'où $u_n = \sqrt{2n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}}$. On a alors

$$u_n - \sqrt{2n} = \sqrt{2n}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}} - 1\right) = \sqrt{2n}\left(\frac{1}{4n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2} + o\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}\right)\right) = O\left(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)$$

   D'où

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{2n} + O\left(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)$$